선형대수학

WISDOM Math

퍼스트편입

CHAPTER 01

벡터

수치값만으로 표현되는 양인

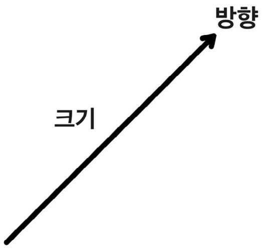
스칼라(scalar)

VS

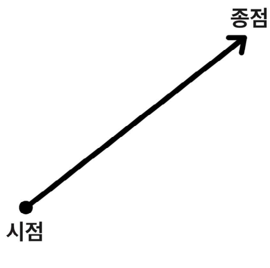
완전한 물리적 기술을 위해 수(number)와 방향 (direction)을 필요로 하는 양인

벡터(vector)

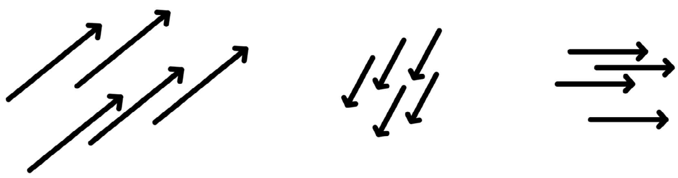
벡터는 2차원, 3차원 공간에서 화살표(유향선분)으로 표현된다.
화살표가 향하는 방향은 벡터의 **방향**, 길이는 벡터의 **크기**



화살표의 꼬리는 벡터의 **시점**(initial point), 끝은 벡터의 **종점**(terminal point)이라 부른다.



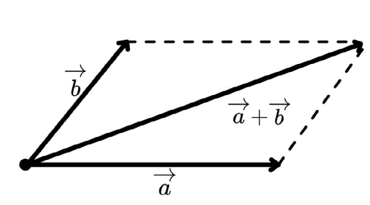
같은 크기와 방향을 갖는 벡터들을 **동치**(동등, equivalent)라고 한다. 다른 위치에 있어도 크기가 같고 방향이 같다면 동치이다.



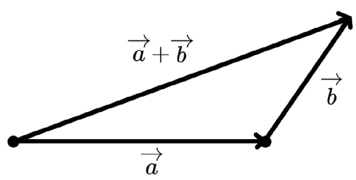
동치인 벡터들

1. 벡터의 연산

정의	**벡터의 덧셈**(평행사변형 규칙, 삼각형 규칙) 임의의 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여, • $\vec{a}+\vec{b}$는 $\vec{a}$의 시점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시켜 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이웃하는 두 변이 되도록 평행사변형을 만들었을 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 공통 시점을 시점으로, 마주 보는 꼭짓점을 종점으로 하는 화살표이다. • $\vec{a}+\vec{b}$는 $\vec{a}$의 종점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시켰을 때, $\vec{a}$의 시점을 시점으로 $\vec{b}$의 종점을 종점으로 하는 화살표이다.



평행사변형 규칙



삼각형 규칙

항상,

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

이고,

길이가 0인 벡터를 **영벡터**(zero vector)라 하고 $\vec{0}$으로 표시하며

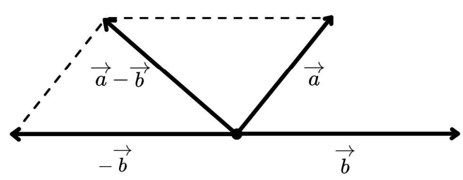
$$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

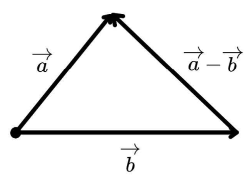
이다. 또한

$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$$

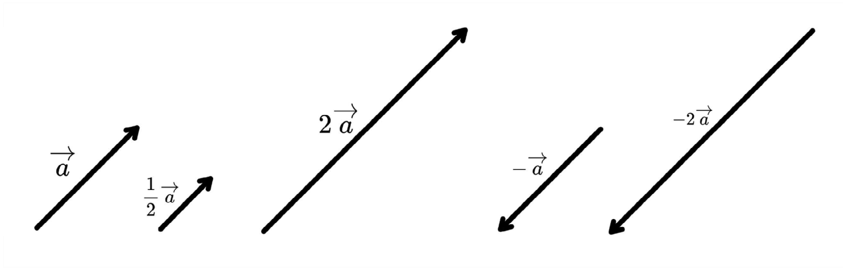
이다.

정의	**벡터의 뺄셈** 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$의 차(difference)는 $$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$ 로 정의한다. 여기서 $-\vec{b}$는 $\vec{b}$의 음(negative)이다.





정의	**벡터의 실수곱** 벡터 $\vec{a}$와 실수(스칼라) k에 대하여 $k\vec{a}$는 다음과 같이 정의한다. ① $k>0$이면 $\vec{a}$의 방향은 그대로, 크기는 k배 한다. ② $k<0$이면 $\vec{a}$의 방향은 반대로, 크기는 $\lvert k\rvert$배 한다. ③ $k=0$이거나 $\vec{a}=\vec{0}$이면 $k\vec{a}=\vec{0}$이다.



실수곱의 성질

- 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 평행이면 $\vec{a}=k\vec{b}$이다. $(k\neq 0)$
- $\vec{b}$가 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 1인 벡터라면 $\vec{b}=\dfrac{1}{\lvert\vec{a}\rvert}\vec{a}$이다.

(크기가 1인 벡터를 단위벡터라 한다.)

2. 좌표계의 벡터

직교좌표계를 도입하면 흩어져있던 벡터를 정렬할 수 있다.

1) 평면 벡터

좌표평면의 원점$(0,0)$을 시점이 되도록 벡터 $\vec{a}$를 위치시키면 종점이 어느 한 점(a_1,a_2)에 위치 해 있다. 이때, 점(a_1,a_2)를 벡터 $\vec{a}$의 **성분**이라고 한다.

$$\vec{a}=(a_1,a_2)$$

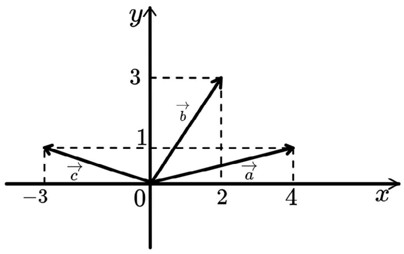
로 표기한다.

- 시점이 원점인 벡터를 **위치벡터**라고 한다.
- **동치**인 벡터들은 **성분이 같다.**
- **성분이 같은** 벡터들은 **동치**이다.

즉, $\vec{a}=(a_1,\,a_2)$와 $\vec{b}=(b_1,\,b_2)$에서

$$\vec{a}=\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad a_1=b_1\ ,\ a_2=b_2$$

이다.



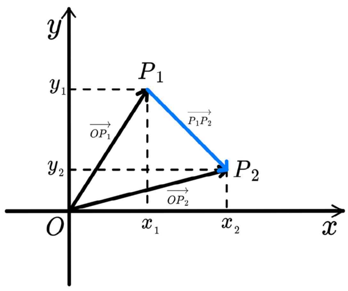
$\vec{a}=(4,1)$, $\vec{b}=(2,3)$, $\vec{c}=(-3,1)$

2) 성분으로 주어진 벡터의 합, 차, 실수곱

$$\vec{a}=(a_1,a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2)$$
$$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$
$$\Rightarrow \vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$
$$\Rightarrow k\vec{a}=(ka_1,ka_2)$$

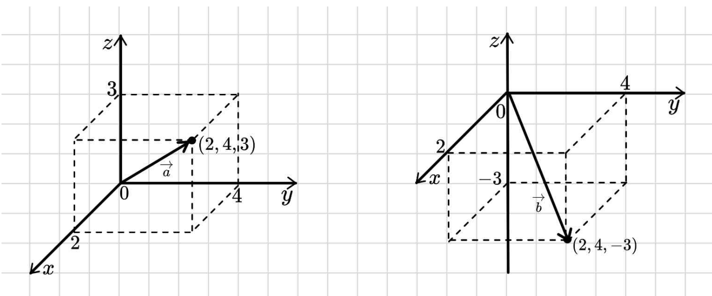
※ 시점이 원점이 아닌 경우

점$P_1(x_1,y_1)$, 점$P_2(x_2,y_2)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$



3) 공간 벡터

좌표공간의 원점$(0,0,0)$을 시점이 되도록 벡터 $\vec{a}$를 위치시키면 종점이 어느 한 점(a_1,a_2,a_3)에 위치해 있다. 이때, 점(a_1,a_2,a_3)를 벡터 $\vec{a}$의 **성분**이라고 한다.
$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$로 표기한다.



$\vec{a}=(2,4,3)$　　$\vec{b}=(2,4,-3)$

주의	**점과 벡터를 구분하자.**

대표문제

$\vec{u}=(2,1,3)$, $\vec{v}=(4,-1,-7)$, $\vec{w}=(0,2,5)$라 할 때, $2\vec{u}+\vec{v}+2\vec{x}=\vec{x}-\vec{w}$를 만족하는 벡터 $\vec{x}$를 구하시오.

풀이

$\vec{x}=-2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=-2(2,1,3)-(4,-1,-7)-(0,2,5)=(-8,-3,-4)$

정의

벡터의 놈(norm), 크기, 길이(length)

벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2)$의 **놈**

$$\|\vec{a}\|=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2}$$

즉, 시점$(0,0)$과 종점(a_1,a_2) 사이의 거리를 피타고라스의 정리를 이용하여 계산한다.

벡터 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$의 **놈**

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}$$

이때, 놈이 1인 벡터를 **단위벡터**(unit vector)라 한다.
특히, 평면 벡터에서 $\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(0,1)$와
공간 벡터에서 $\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$, $\vec{e_3}=(0,0,1)$은 **표준단위벡터(표준벡터)**라 한다.

두 점 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$이므로

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

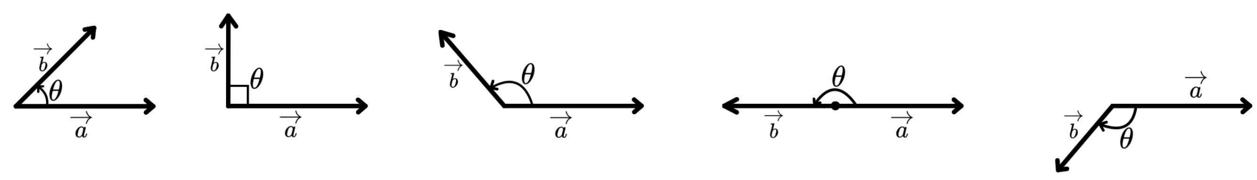
두 점 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$이므로

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

이다.

3. 벡터의 내적과 외적

시점이 일치하는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 만드는 각도 중에서 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$를 만족하는 각을 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 **이루는 각**(angle between a and b)이라 한다.



정의	**내적**(점곱) (inner product(dot product) 평면 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각이 θ일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 $\vec{a} \bullet \vec{b} = \lVert \vec{a} \rVert \cdot \lVert \vec{b} \rVert \cos\theta = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$ 이다. (여기서 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$) 공간 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각이 θ일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은 $\vec{a} \bullet \vec{b} = \lVert \vec{a} \rVert \cdot \lVert \vec{b} \rVert \cos\theta = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ 이다. (여기서 $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$) ※ $\vec{a} \bullet \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$로 표기하기도 한다.

내적의 성질

① $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$

② $(\vec{a}+\vec{b}) \bullet \vec{c} = (\vec{a} \bullet \vec{c}) + (\vec{b} \bullet \vec{c})$

③ $(k\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (k\vec{b}) = k(\vec{a} \bullet \vec{b})$

④ $|\vec{a} \bullet \vec{b}| \le \lVert \vec{a} \rVert \cdot \lVert \vec{b} \rVert$ (코시-슈바르츠부등식)

⑤ $\vec{a} \bullet \vec{a} = \lVert \vec{a} \rVert^2$

⑥ $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

⑦ $\vec{a} \bullet \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

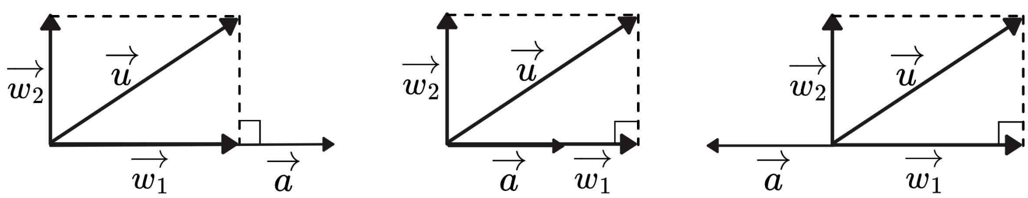
정사영

벡터 $\vec{u}$를 영이 아닌 특정 벡터 $\vec{a}$와 수직인 벡터로 분해 할 수 있고 이 방법은 유일하다. 방법은 다음과 같다.

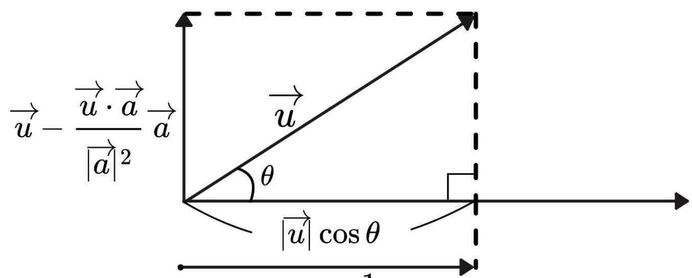
$\vec{u}$의 종점에서 $\vec{a}$를 포함하는 직선으로 수선을 내린다.

$\Rightarrow$ 수선의 발을 종점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{w_1}$을 만든다.

$\Rightarrow$ 벡터 $\overrightarrow{w_2} = \vec{u} - \overrightarrow{w_1}$을 만든다.



$\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{w_1} + (\vec{u} - \overrightarrow{w_1}) = \vec{u}$이 되어 $\vec{u}$는 두 수직인 벡터들의 합으로 분배된다.



$$
\begin{aligned}
&|\vec{u}|\cos\theta\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \\
&= |\vec{u}|\frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{|\vec{u}|\,|\vec{a}|}\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \\
&= \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}
\end{aligned}
$$

이때, $\overrightarrow{w_1}$을 $\vec{u}$의 $\vec{a}$위로의 **정사영**(직교사영, Orthogonal projection)**벡터**라고 한고 기호 $proj_{\vec{a}}\vec{u}$로 표기한다.

$$proj_{\vec{a}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\bullet\vec{a}}{\vec{a}\bullet\vec{a}}\vec{a}$$

또한, 위의 그림에서 $|\vec{u}|\cos\theta$를 $\vec{u}$의 $\vec{a}$위로의 **스칼라 사영**(scalar projection)이라 하고 이 값을 정리하여

$$comp_{\vec{a}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\bullet\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

로 기억하기로 한다.

대표문제 1

$\vec{a}=(3,6,-6)$, $\vec{b}=(0,-3,4)$, $\vec{c}=(1,-2,3)$에 대해 다음 식을 계산하시오.

(1) $\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ (2) $\|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\|$ (3) $\dfrac{1}{\|\vec{b}\|}\vec{b}$

풀이

(1) 14 (2) $\sqrt{54}$ (3) $\left(0,\ -\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

대표문제 2

두 벡터 $\vec{u}=i-j+2k$, $\vec{v}=2i+j+k$에 대하여 $\vec{u}\bullet\vec{v}$를 구하고, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 구하시오.

풀이

$\vec{u}=(1,-1,2)$, $\vec{v}=(2,1,1)$이므로 $\vec{u}\bullet\vec{v}=1\times2+(-1)\times1+2\times1=3$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}\quad(0\le\theta\le\pi)$

대표문제 3

두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)$에 대하여 $proj_{\vec{a}}\vec{b}$를 구하시오.

풀이

$\vec{b}\cdot\vec{a}=(2,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ -1,\ 2)=2\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 2=2-1+2=3$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)\cdot(1,\ -1,\ 2)=1^2+(-1)^2+2^2=1+1+4=6$

$\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

$proj_{a}\vec{b}=\dfrac{1}{2}\vec{a}=\dfrac{1}{2}(1,\ -1,\ 2)=\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

정의

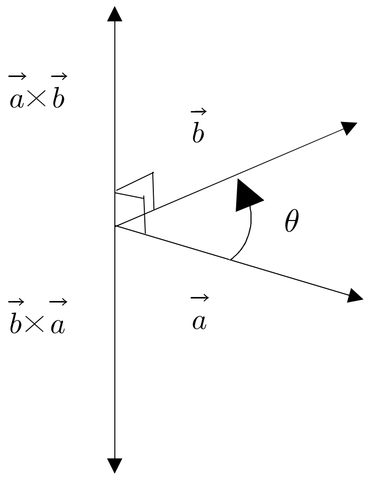
외적(cross product)

공간 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$에 대하여

$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 외적은

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\right)$$

$$=\left| \qquad\qquad \right|$$



(단, θ는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각. $0\le\theta\le\pi$)

외적의 성질(1)

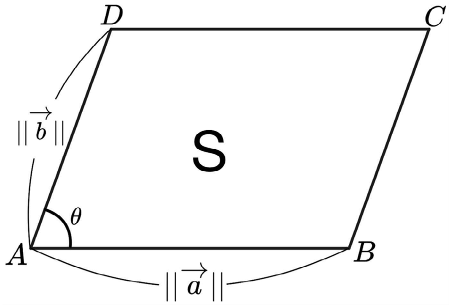
① $\vec{a}\times\vec{b}$은 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 동시에 수직이다.(오른손법칙)

② $\vec{b}\times\vec{a}$는 $\vec{a}\times\vec{b}$와 크기가 같고 방향은 반대이다. (즉, $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$)

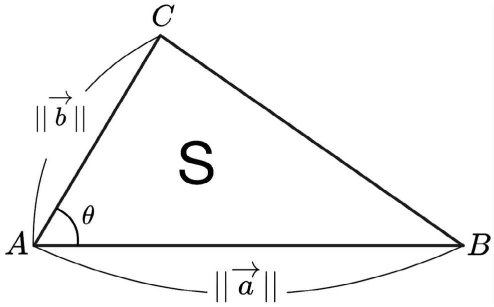
③ $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta$

이로부터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 외적의 크기는 $\|\vec{a}\|$와 $\|\vec{b}\|$가 이웃하는 두 변의 이루는 평행사변형의 넓이이다.

또한, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 외적의 크기의 반은 $\|\vec{a}\|$와 $\|\vec{b}\|$가 이웃하는 두 변이 이루는 삼각형의 넓이이다.



$$S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta$$
$$= \|\vec{a}\times\vec{b}\|$$



$$S = \frac{1}{2}\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

외적의 성질(2)

① $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

② $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$

③ $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

④ $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ (라그랑주의 항등식)

⑤ $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$

⑥ $k(\vec{a}\times\vec{b})=(k\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(k\vec{b})$

⑦ $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$

⑧ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

⑨ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \not\Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ or $\vec{b}=\vec{0}$

⑩ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$

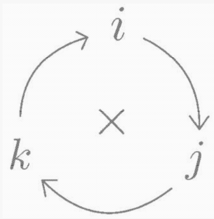
⑪ 벡터의 삼중곱

㉠ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

㉡ $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

⑫ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$

참고



$i\times i=0$,	$j\times j=0$,	$k\times k=0$
$i\times j=k$,	$j\times k=i$,	$k\times i=j$
$j\times i=-k$,	$k\times j=-i$,	$i\times k=-j$

대표문제 1

$\vec{a}=(6,2,7)$, $\vec{b}=(-3,0,2)$, $\vec{c}=(-1,3,2)$에서 $\vec{a}\times\vec{b}$, $(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{c}$, $\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c})$를 구하시오.

풀이

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(2\cdot2-7\cdot0,\ 7\cdot(-3)-6\cdot2,\ 6\cdot0-2\cdot(-3))$$
$$=(4,\ -33,\ 6)$$
$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}=(0\cdot7-2\cdot2,\ 2\cdot6-(-3)\cdot7,\ (-3)\cdot2-0\cdot6)$$
$$=(-4,\ 33,\ -6)$$
$$(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 33 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=(33\cdot2-(-6)\cdot3,\ (-6)\cdot(-1)-(-4)\cdot2,\ -4\cdot3-33\cdot(-1))$$
$$=(84,\ 14,\ 21)$$
$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=(2\cdot2-7\cdot3,\ 7\cdot(-1)-6\cdot2,\ 6\cdot3-2\cdot(-1))$$
$$=(-17,\ -19,\ 20)$$
$$\vec{b}\times(\vec{a}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 0 & 2 \\ -17 & -19 & 20 \end{vmatrix}$$
$$=(0\cdot20-2\cdot(-19),\ 2\cdot(-17)-(-3)\cdot20,\ (-3)\cdot(-19)-0\cdot(-17))$$
$$=(38,\ 26,\ 57)$$

[빠른풀이] - 강의참고

대표문제 2

삼각형 PQR의 세 꼭짓점이 $P(1,-1,2)$, $Q(0,3,4)$, $R(6,1,8)$일 때, 넓이를 구하시오.

풀이

$P(1,\ -1,\ 2)$, $Q(0,\ 3,\ 4)$, $R(6,\ 1,\ 8)$를 세 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 넓이는 외적으로 구할 수 있다.

삼각형 $PQR=\frac{1}{2}\,\|\,\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\,\|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{285}=\sqrt{285}$

4. 스칼라 삼중곱(scalar triple product)

내적과 외적을 이용한 스칼라 삼중곱이란 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 공간벡터이고 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$라고 하면

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

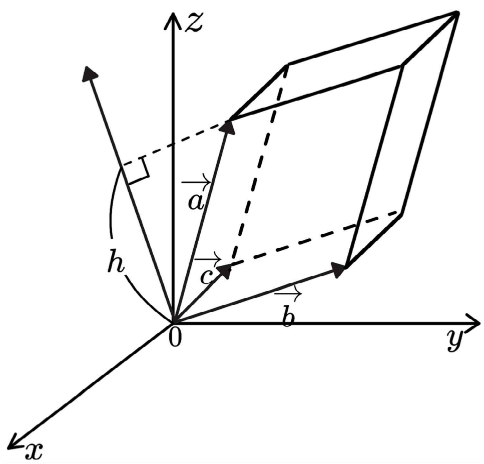
를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$의 스칼라 삼중곱이라 부른다.

(식 유도과정)

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} i-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} k\right)$$
$$=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} a_1-\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} a_2+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} a_3$$
$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

주의 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$는 의미가 없으므로 헷갈리지 말도록!

이로부터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$의 스칼라 삼중곱의 절댓값은 $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $\|\vec{c}\|$를 세 모서리의 길이로 갖는 평행육면체의 부피이다.



$h=\|proj_{\vec{b}\times\vec{c}}\,\vec{a}\|=\dfrac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}$로 쓸 수 있고

평행육면체의 부피는 (밑면의 넓이) · (높이)이므로 $\|\vec{b}\times\vec{c}\|\cdot\dfrac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}$이 된다.

따라서 부피 $V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$임을 알게 된다.

대표문제

R^3에서 네 점 $A(1,1,1)$, $B(3,1,1)$, $C(1,4,1)$, $D(1,1,2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각뿔 $ABCD$의 부피를 구하여라.

풀이

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{AC}=(0,3,0)$, $\overrightarrow{AD}=(0,0,1)$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=2\cdot3\cdot1=6$

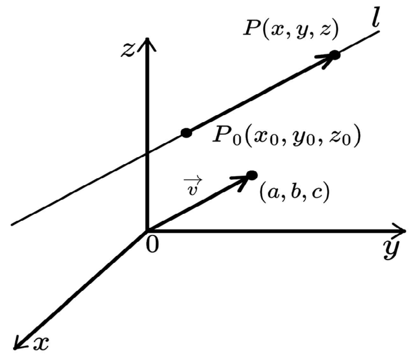
따라서 부피 $\dfrac{|6|}{6}=1$

5. 직선과 평면

1) 직선의 방정식

점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$을 지나고 벡터 $\vec{v}=(a,b,c)$에 평행한 직선의 방정식 l

$$l \ : \ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \ \text{또는} \ l : \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

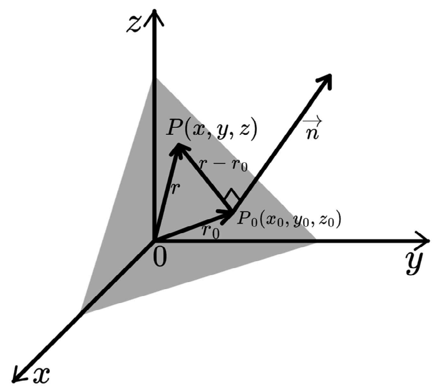


($\overrightarrow{P_0P}$는 $\vec{v}$에 평행하다. $\vec{v}$: **방향벡터**)

2) 평면의 방정식

점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(a,b,c)$에 수직인 평면의 방정식 α

$$\alpha \ : \ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \ \text{또는} \ \alpha : ax+by+cz+d=0$$



($\overrightarrow{P_0P}$는 $\vec{n}$에 수직이다. $\vec{n}$: **법선벡터**)

대표문제 1

두 직선 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$, $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{2}$에 모두 수직인 벡터를 모두 고르시오.

① $(3, 2, 5)$ ② $(3, -4, -5)$ ③ $(6, -8, -10)$ ④ $(1, 1, 1)$

풀이

두 직선의 방향벡터는 각각 $\overrightarrow{d_1}=(1, 2, -1)$, $\overrightarrow{d_2}=(2, -1, 2)$이다.

두 방향벡터의 외적 $\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}$는 $\overrightarrow{d_1}$과 $\overrightarrow{d_2}$에 모두 수직이므로

$\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}=(3, -4, -5)$에 스칼라배는 모두 답이 될 수 있다.

따라서 답은 ②, ③

대표문제 2

네 점 $A(0, 1, 2)$, $B(2, 0, 1)$, $C(1, 0, 0)$, $D(2, 1, 0)$에 대하여
두 점 A, B를 지나고 직선 CD와 평행인 평면이 점 $(k, 0, 0)$을 지날 때, k값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이

$\overrightarrow{AB}=(2, -1, -1)$, $\overrightarrow{CD}=(1, 1, 0)$

법선벡터 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=(1, -1, 3)$이고 점 $A(0, 1, 2)$를 지나므로 평면의 방정식은

$x-y+3z=5$이다.

점 $(k, 0, 0)$을 대입하면 $k=5$

대표문제 3

평면 $x+z=2$, $x+2y+z=1$의 사이각 θ에 대해 $\sin\theta$ 는?

풀이

두 평면의 법선벡터는 각각 $\overrightarrow{n_1}=(1, 0, 1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1, 2, 1)$이므로 두 평면이 이루는 각 θ에

대하여 $\cos\theta=\frac{|1+0+1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{12}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\sin\theta=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

따라서 답은 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. 거리공식

1) 점과 점 사이의 거리

두 점 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$사이의 거리 d

$$d=\overline{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

2) 점과 직선 사이의 거리

점 $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$과 직선 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$사이의 거리 d

$$d=\frac{\| \overrightarrow{AB}\times\vec{v} \|}{\| \vec{v} \|}$$

$\left(\text{ 직선의 방향벡터 } \vec{v}=(a,\ b,\ c),\ \text{직선 위의 한 점 } B(x_0,\ y_0,\ z_0)\right)$

3) 점과 평면 사이의 거리

점 $A(x_1,\ x_2,\ x_3)$와 평면 $ax+by+cz+d=0$사이의 거리 d

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

4) 평행한 두 직선 사이의 거리

2)을 이용한다.

5) 꼬인 위치의 두 직선 사이의 거리

직선 l_1은 점 P_1을 지나고 방향벡터 $\overrightarrow{v_1}$를 갖고, 직선 l_2는 점 P_2를 지나고 방향벡터 $\overrightarrow{v_2}$를 갖을 때 l_1과 l_2의 거리 d

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\bullet(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})|}{\| \overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2} \|}$$

6) 직선과 평면 사이의 거리

직선 위의 한 점과 평면 사이의 거리와 같다. 3)을 이용한다.

7) 평면과 평면 사이의 거리

평면 위의 한 점과 평면 사이의 거리와 같다. 3)을 이용한다.

대표문제 1

원점에서 직선 $\dfrac{x+1}{2}=y-2=\dfrac{z}{2}$ 까지의 최소거리는?

풀이

주어진 직선은 점 $A(-1,2,0)$를 지나고 방향벡터는 $\vec{v}=(2,1,2)$이다.

$\overrightarrow{OA}\times\vec{v}=(4,2,-5)$이므로 점과 직선사이의 거리는 $d=\dfrac{\| \overrightarrow{OA}\times\vec{v} \|}{\| \vec{v} \|}=\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

대표문제 2

세점 $(2,1,0),\ (0,1,2),\ (1,-1,1)$을 모두 포함하는 평면을 α라 할 때, 원점과 α사이의 거리는?

풀이

$A(2,1,0),\ B(0,1,2),\ C(1,-1,1)$라 할 때 $\overrightarrow{AB}=(-2,0,2),\ \overrightarrow{AC}=(-1,-2,1)$이고 평면 α의 법선벡터는 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4,0,4)\ //\ (1,0,1)$이다.

평면 α는 $x+z=2$이므로 거리 $d=\dfrac{|2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

대표문제 3

점 $(1,4,3)$과 점 $(3,0,-1)$로부터 같은 거리에 있는 점들로 이루어진 평면의 방정식을 구하시오.

풀이

$(1,4,3),\ (3,0,-1)$ 에서 같은 거리인 점들의 평면
$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=(x-3)^2+y^2+(z+1)^2$
정리하면 $x-2y-2z+4=0$

대표문제 4

두 직선 $l_1:\ \dfrac{x}{2}=y-1=z+3,\ l_2:\ x-1=\dfrac{y+2}{2}=z$ 사이의 거리는?

풀이

두 직선의 방향벡터를 각각 $v_1,\ v_2$라고 할 때 $v_1=(2,1,1),\ v_2=(1,2,1)$이다.

두 직선은 꼬인위치에 있다.

l_1은 점 $P_1(0,1,-3)$를 지나고 l_2는 점 $P_2(1,-2,0)$를 지나므로

$\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-2,0)-(0,1,-3)=(1,-3,3)$,

$\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-1,3)$이므로

$\left|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\right|=|(-1,-1,3)|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}$이다.

따라서 거리 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})\right|}{\|\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}\|}=\dfrac{|(1,-3,3)\cdot(-1,-1,3)|}{\sqrt{11}}=\dfrac{|-1+3+9|}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$