미분적분학

WISDOM Math

퍼스트편입

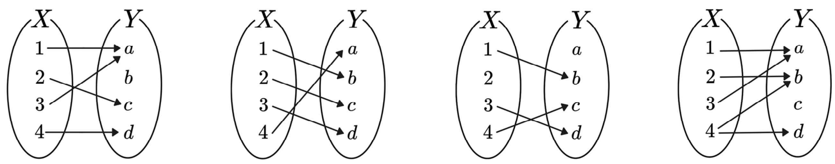
CHAPTER 01
함수

1. 함수

1) 함수

공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X의 원소에 Y의 원소가 짝지어진 것을 X에서 Y로의 **대응**이라 한다. 기호는 $x \to y$로 나타낸다.
또한 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 **오직 하나씩 대응**할 때, 이 대응을 **X에서 Y로의 함수**라 한다. 기호는 $f: X \to Y$ 또는 $X \xrightarrow{f} Y$로 나타낸다.

ex) 함수 (O) 함수 (O) 함수 (X) 함수 (X)



ex) 다음은 모두 같은 표현이다.

$$f(x)=3x+2 \Leftrightarrow y=3x+2 \Leftrightarrow f: x \to 3x+2 \Leftrightarrow x \xrightarrow{f} 3x+2$$

2) 용어정리

$f: X \to Y$에 대하여 집합 X를 **정의역,** Y를 **공역,** $y=f(x)$를 함수 f에 의한 x의 **함숫값,** $f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$를 **치역**이라 한다. $f(x)\subset Y$ 이다.
곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때 이 직선을 그 곡선의 **점근선**이라 한다.
두 함수 f와 g의 정의역이 서로 같고 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$ 일 때, 두 함수 f와 g는 **서로 같다**고 한다. 기호는 $\boldsymbol{f=g}$ 이다. f와 g가 서로 같지 않을 때의 기호는 $f\neq g$이다.

ex) 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$에 대하여

① 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$인 경우에는

$$f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$$

이므로 두 함수 f와 g는 서로 같다. 즉 $f=g$ 이다.

② 정의역이 $\{-1, 0, 2\}$인 경우에는

$$f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(2)\neq g(2)$$

이므로 두 함수 f와 g는 서로 같지 않다. 즉 $f\neq g$ 이다.

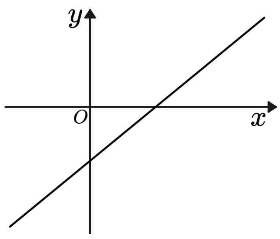
3) 함수의 그래프의 특징

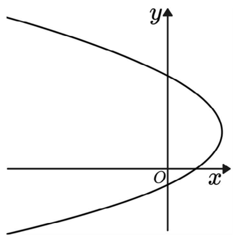
함수의 정의에 따라, 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 x축에 수직인 직선 $x=a$와 오직 한 점에

서 만난다. 즉 함수는 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x_1 = x_2$이면 $f(x_1) = f(x_2)$이다.

실수 a에 대하여 직선 $x = a$와 만나지 않거나 두 개 이상의 점에서 만나는 그래프는 a를 원소로 하는 집합을 정의역으로 하는 함수의 그래프가 될 수 없다.

ex) 함수 (O) 함수 (X)





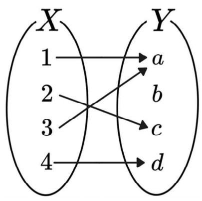
2. 함수의 종류

1) 단사함수(일대일 함수)

함수$f(x)$의 정의역의 임의의 원소 x_1, x_2에 대하여

$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.

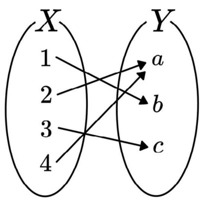
즉, 정의역의 각 원소가 공역의 각 원소에 하나씩 대응되는 함수



2) 전사함수

공역과 치역이 같은 함수

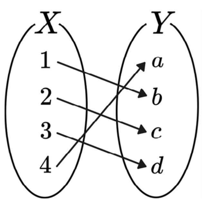
즉, $f(X) = Y$



3) 전단사함수(일대일 대응)

단사함수이고 공역과 치역이 같은 함수

$x \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이고 $f(X) = Y$인 함수



4) 양함수와 음함수

(1) 양함수

$y = f(x)$와 같이 쓰는 함수

한 변에 종속변수(y)가 독립변수(x)에 관한 식으로 정리된 형태

ex) $y = 2x + 3$, $y = \sqrt{4 - x^2}$

(2) 음함수

$f(x,y)=0$, $f(x,y,z)=0$과 같이 쓰는 함수

독립변수와 종속변수가 하나의 방정식으로 표현된 형태

ex) $x^2+y^2=1$, $x^2+xy+y^2=3$

음함수는 함수의 정의에서 어긋날 수 있지만 그 관계를 특정 구간(근방)에서 제한하면 함수가 된다.

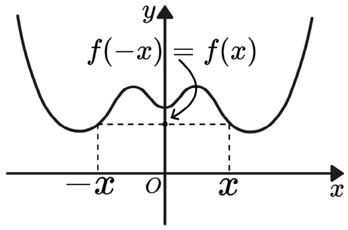
위의 예시 중 $x^2+y^2=1$은 $y=\sqrt{1-x^2}$와 $y=-\sqrt{1-x^2}$를 합친 것으로 본다.

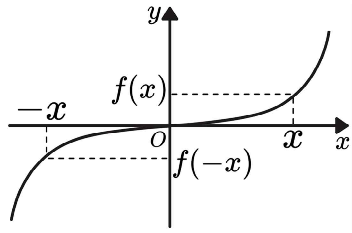
5) 우함수와 기함수

(1) 우함수

$f(x)=f(-x)$ $(\forall x \in X)$

즉, y축 대칭인 함수





(2) 기함수

$f(x)=-f(-x)$ $(\forall x \in X)$

즉, 원점 대칭인 함수

(3) 연산 성질

① 우$\pm$우$=$우

② 우$\times$우$=$우

③ 우$\div$우$=$우, 기$\div$기$=$우 (단, 분모의 함수가 0이 아닌 구간에서)

④ 우(우)$=$우, 우(기)$=$우, 기(기)$=$기

⑤ 우$\times$기$=$기

⑥ 기$\pm$기$=$기

⑦ 기$\times$기$=$우

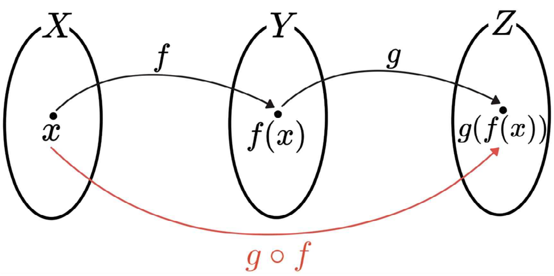
⑧ 기$\div$우$=$기, 우$\div$기$=$기 (단, 분모의 함수가 0이 아닌 구간에서)

3. 합성함수와 역함수

1) 합성함수

두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$에 대하여

X의 원소 x를 z의 원소 $g(f(x))$에 대응시키는 함수



기호는 $g \circ f$, $g \circ f(x)$, $(g \circ f)(x)$, $g(f(x))$로 나타낸다.

(1) 합성함수의 성질

① $f \circ g \neq g \circ f$, 교환법칙 불성립

② $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, 결합법칙 성립

③ $f \circ I = f$, $I \circ f = f$ (I는 항등함수)

대표예제

두 함수 $f(x)=2x-3$, $g(x)=2x^2+3x+1$에 대하여 $(f\circ g)(x)=3$을 만족하는 모든 x값들의 합은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

풀이

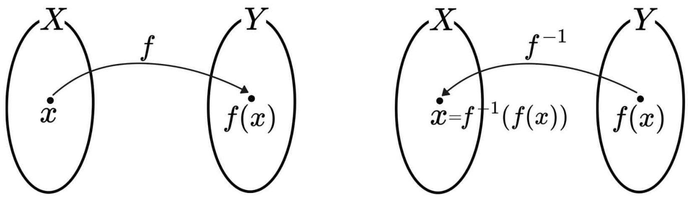
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=2g(x)-3=2(2x^2+3x+1)-3=4x^2+6x-1=3$

정리하면 $2x^2+3x-2=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 답은 ⑤ $-\frac{3}{2}$

2) 역함수

x를 y로 대응시키는 함수 $y=f(x)$에 대하여 이를 거꾸로 대응시키는 함수를 말한다.
즉, 함수 $f:X\to Y$에 대하여 함수 $g:Y\to X$이고 $\forall x\in X,\ g(f(x))=x$를 만족하면
g를 f의 역함수라 하고 $g=f^{-1}$로 나타낸다.



(1) 역함수가 존재할 조건

모든 함수의 역함수가 존재하는 것은 아니다.

함수 f가 전단사함수일 때 f의 역함수 f^{-1}가 존재한다.

(2) 역함수의 성질

① $(f^{-1})^{-1}=f$

② $f^{-1}(f(x))=x$

③ $f(f^{-1}(y))=y$

④ $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$에서 직선 $y=x$에 대해 대칭

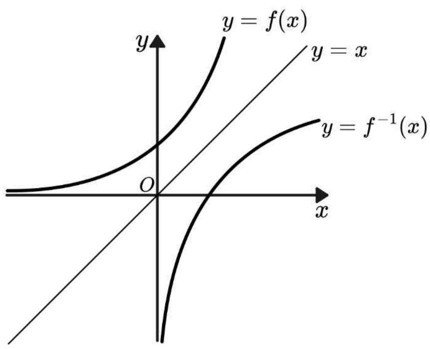
⑤ $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

(3) 역함수 구하는 방법

주어진 함수 $y=f(x)$에서 x와 y의 자리를 바꾸어 y에 관한 식으로 정리한다.

이때, $y=f^{-1}(x)$로 표기한다.

＊ x와 y의 자리를 바꾼다는 것은 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 의미한다.



(4) f와 f^{-1}의 관계

① f와 f^{-1}의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭

② f가 증가함수일 경우

f와 f^{-1}의 교점은 $y=x$위에만 존재한다.

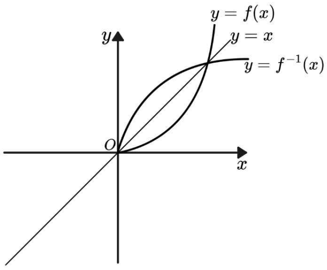
③ f가 감소함수일 경우

f와 f^{-1}의 교점은 $y=x$ 밖 교점이 존재할 수 있다.

ex 1) $f(x)=x^2\ (x\geq 0)$은 증가함수이고

역함수를 구해보면 $x=y^2(y\geq 0) \Rightarrow y^2=x \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$

$\therefore y=\sqrt{x}$이므로 역함수 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$이다.

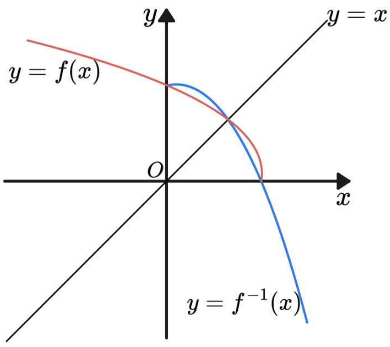


교점은 $(0,0)$, $(1,1)$이고 이 두 점 모두 직선 $y=x$위의 점이다.

ex 2) $f(x)=\sqrt{-x+1}$는 감소함수이고

역함수를 구해보면 $x=\sqrt{-y+1} \Rightarrow x^2=-y+1 \Rightarrow y=-x^2+1(x\geq 0)$이므로

역함수는 $f^{-1}(x)=-x^2+1\ (x\geq 0)$이다.



교점은 $(0,0)$, $(1,1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$이고

$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$는 직선 $y=x$위에 있지만 $(0,0)$, $(1,1)$은 직선 $y=x$ 밖에 있다.

대표예제

함수 $f(x)=\dfrac{x-2}{3x+4}$의 역함수를 구하면?

① $f^{-1}(x)=\dfrac{4x+2}{1-3x}$ ② $f^{-1}(x)=\dfrac{x-4}{3x+2}$ ③ $f^{-1}(x)=-\dfrac{x-2}{3x+4}$

④ $f^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{4x-1}$ ⑤ $f^{-1}(x)=\dfrac{1-2x}{4x+3}$

풀이

주어진 함수의 x와 y바꾸면 $x=\dfrac{y-2}{3y+4}$이고 이것을 y에 관한 식으로 정리하면 $y=\dfrac{4x+2}{1-3x}$이다. 따라서 답은 ① $f^{-1}(x)=\dfrac{4x+2}{1-3x}$

4. 지수함수와 로그함수

1) 거듭제곱근의 계산

$a>0$, $b>0$ 이고 m, n은 2이상의 정수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

(5) $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 양의 정수)

(6) $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

(7) $a>b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

2) 지수의 연산 법칙

(1) $a\neq 0, b\neq 0$이고 m, n은 정수

① $a^0=1$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

③ $a^m\times a^n=a^{m+n}$

④ $a^m\div a^n=a^{m-n}$

⑤ $(ab)^m=a^m b^m$

⑥ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$

⑦ $(a^m)^n=a^{mn}$

(2) $a>0, b>0$이고 x, y는 실수

① $a^0=1$

② $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{-x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

③ $a^x\times a^y=a^{x+y}$

④ $a^x\div a^y=a^{x-y}$

⑤ $(ab)^x=a^x b^x$

⑥ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$

⑦ $(a^x)^y=a^{xy}$

주의	
	• 0^0은 정의하지 않는다. • 밑이 음수이고 지수가 실수일 때 주의하자. $((-3)^2)^{\frac{1}{2}}=(-3)^{2\times\frac{1}{2}}=(-3)^1=-3$ ( ) $((-3)^2)^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}=(3)^1=3$ ( )

3) 로그의 연산 법칙

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$일 때 $a^x=b \;\; \Leftrightarrow \;\; x=\log_a b$ 이고, 이때 a를 밑, b를 진수라고 한다.

$x>0$, $y>0$ 일 때

(1) $\log_a a=1$

(2) $\log_a 1=0$

(3) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

(4) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

(5) 진수 또는 밑이 지수형식

① $\log_a x^n = n\log_a x$ ② $\log_{a^m} x = \dfrac{1}{m}\log_a x$

③ $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m}\log_a b$ $(n,\ m$은 실수$)$

(6) 밑변환공식

① $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}(c \neq 1,\ c > 0)$ ② $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}(b \neq 1)$

(7) 지수가 로그형식

① $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ ② $a^{\log_a b} = b$

4) 자연로그

(1) 무리수 e

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, 일정한 값에 수렴한다.
이때 수렴값을 e와 같이 나타낸다. 즉

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \right)$$

이다. 이때, e는 무리수이고, 그 값은 $e = 2.71828182845904\cdots$이다.

(2) 자연로그

밑이 e인 로그 $\log_e x$를 x의 자연로그라 하고, 간단히 $\ln x$와 같이 나타낸다.

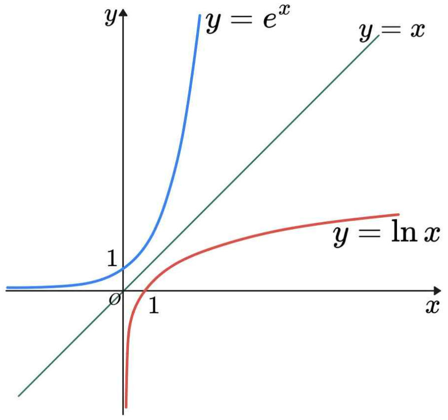
지수함수 $y = e^x$과 로그함수 $y = \ln x$는 서로 역함수 관계에 있다.

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\ln e = 1$$

5) 지수함수와 로그함수의 그래프

이학공학에서 e를 밑으로 갖는 지수함수, 로그함수를 주로 이용하고,
지수함수 $y = e^x = \exp(x)$와 로그함수 $y = \ln x$는 서로 역함수 관계이다.

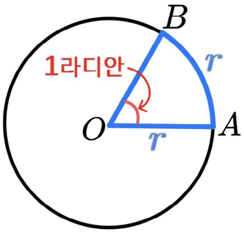


주의	대학수학(편입수학)에서는 $\log x$를 고등수학의 상용로그와 다르게 본다. 상용화된다는 의미의 상용로그로서 $\log x = \ln x$를 뜻함에 유의한다.

5. 삼각함수

1) 호도법

중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 원에서 부채꼴을 반지름의 길이와 호의 길이가 같도록 잡을 때 중심각의 크기를 1 **호도**(radian)라 하고, 이것을 단위로 하는 각의 측정법을 **호도법**이라 한다.



다시 말하면, $\overset{\frown}{AB}=r$일 때, 중심각 AOB의 크기는 1 **호도**($1\,\text{rad}$)이다. 이때 이러한 부채꼴의 $\angle AOB$의 크기는 반지름의 길이 r에 관계없이 항상 일정하다. 즉, r을 어떤 값으로 잡든지 1 **호도**($1\,\text{rad}$)의 크기는 변함없음을 의미한다. $2\pi\text{rad}=360^\circ$를 각각 단위각으로 정리하면 다음과 같다.

$$1\text{rad}=\frac{360^\circ}{2\pi}=\frac{180^\circ}{\pi},\quad 1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad}$$

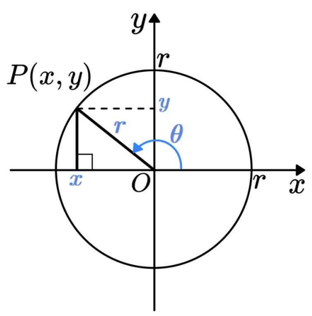
호도법을 사용함으로서 각을 실수와 대응시켜 수학 또는 공학에서의 편의성이 높아진다.

육십분법 $^\circ$	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	270°	360°
호도법 rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2) 삼각함수의 정의

삼각함수는 “각”을 입력하면 어떤 비(비율) 또는 좌표값을 내주는 함수들이고 이것은 천체관측, 물리학, 미적분학, 공학에서 매우 중요한 함수이다.

- 삼각법(trigonometry) : 그리스어 trigonon(삼각형) + metron(측정)
  삼각형을 재는 학문
- 사인(sine) : 라틴어 sinus
  역사적으로 산스크리트어 → 아랍어 음역 → 라틴어 번역 과정에서의 혼동에서 굳어진 말
- 코사인(cosine) : 라틴어 complementi sinus
  (여각의 사인. 즉, $\frac{\pi}{2}-\theta$의 사인)
- 탄젠트(tangent) : 라틴어 tangere(만지다, 접하다)
  ‘원에 접하는 직선’의 이미지에서 나온 이름



θ : 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각

x : 점 P의 x좌표

y : 점 P의 y좌표

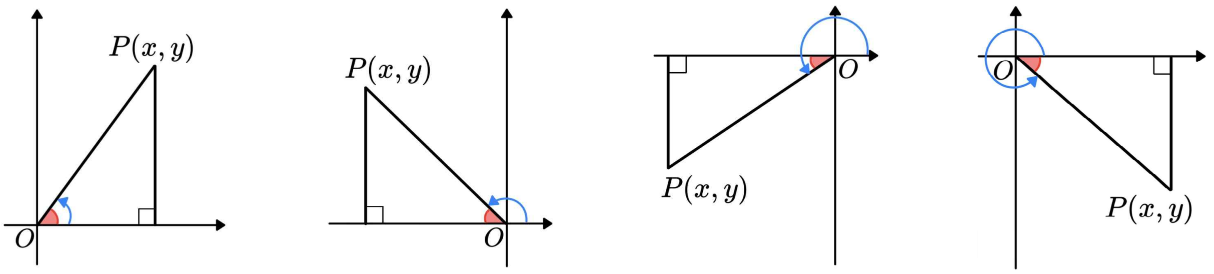
r : 선분 OP의 길이

이때, $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$,

$$\operatorname{cosec}\theta(=\csc\theta)=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{r}{y},\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{r}{x},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{x}{y}$$ 로 정의한다.

위의 정의에 근거하여 점 P의 위치에 따른 삼각함수의 값의 부호를 살펴보면 다음과 같다.

제1사분면의 각	제2사분면의 각	제3사분면의 각	제4사분면의 각
$x>0,\ y>0$	$x<0,\ y>0$	$x<0,\ y<0$	$x>0,\ y<0$



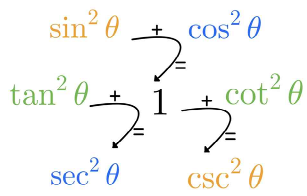
3) 삼각함수의 기본 공식

① $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\left(\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

② $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

③ $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

④ $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$



4) 삼각함수의 정리

(1) 덧셈정리

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

(2) 곱을 합 또는 차로 바꾸는 식 (덧셈정리의 변형)

① $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

② $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

③ $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

④ $\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

(3) 배각 공식

① $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

② $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(4) 3배각 공식

① $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

② $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

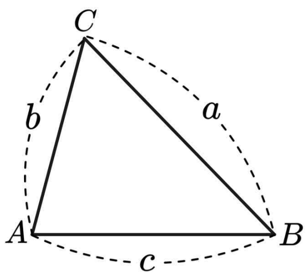
③ $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

(5) 반각 공식

① $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

② $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

(6) 제 1코사인 법칙



① $a = b\cos C + c\cos B$

② $b = c\cos A + a\cos C$

③ $c = a\cos B + b\cos A$

(7) 제 2코사인 법칙

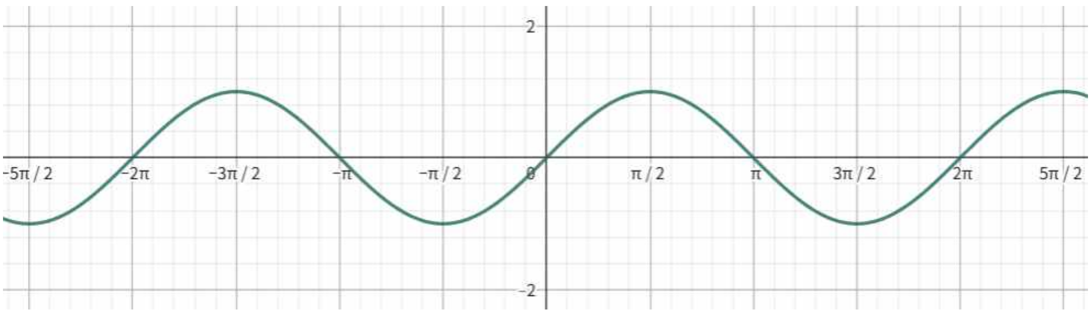
① $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$

② $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B$

③ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C$

5) 삼각함수의 그래프

(1) $y = \sin x$

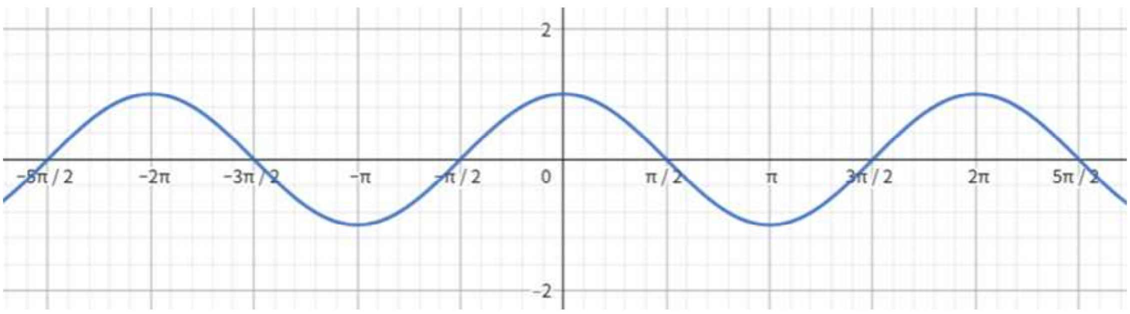


정의역 : $\{ x \mid x$는 실수 전체 $\}$

치역 : $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$

주기 : 2π (혹은 360°)

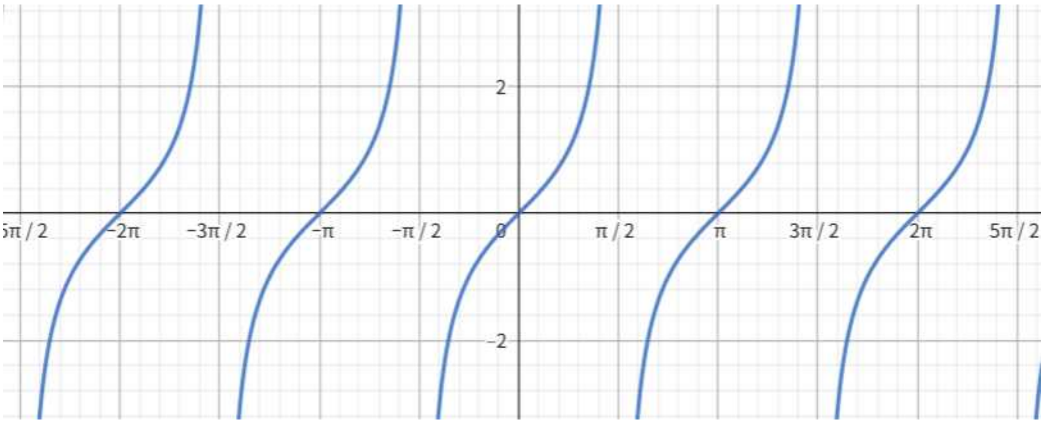
(2) $y = \cos x$



정의역 : $\{ x \mid x$는 실수 전체 $\}$

치역 : $\{y| -1 \le y \le 1\}$
주기 : 2π (혹은 360°)

(3) $y = \tan x$



점근선 : $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$ (n : 정수)
정의역 : 점근선을 제외한 모든 실수
치역 : $\{ y \,|\, y$는 실수 전체 $\}$
주기 : π (혹은 180°)

6) 각 변환 공식

(1) 음의 각 $-\theta$

① $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
② $\cos(-\theta) = \cos\theta$
③ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(2) 각 $n\pi \pm \theta$ (단, n은 자연수)

$\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$

- $\sin \rightarrow \sin, \cos \rightarrow \cos, \tan \rightarrow \tan$ 로 결정
- 각의 위치(사분면)를 보고 부호를 결정

① $\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$
② $\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$
③ $\tan(2\pi + \theta) = \tan\theta$
④ $\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$
⑤ $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$
⑥ $\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$
⑦ $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
⑧ $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
⑨ $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
⑩ $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
⑪ $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
⑫ $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

(3) 각 $\dfrac{n\pi}{2} \pm \theta$ (단, n은 양의 홀수)

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$

- $\sin \to \cos$, $\cos \to \sin$, $\tan \to \frac{1}{\tan}$ 로 결정
- 각의 위치(사분면)를 보고 부호를 결정

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

④ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

⑤ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

⑥ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

⑦ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$

⑧ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

⑨ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$

⑩ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$

⑪ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$

⑫ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$

7) 삼각함수의 합성

사인함수와 코사인함수의 일차결합을 사인(또는 코사인)함수로 표현할 수 있다.
삼각함수의 덧셈정리를 이용하면 다음 같이 정리된다.

① $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ (이때, $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

② $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)$ (이때, $\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

대표예제 1

다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sin\frac{25}{6}\pi+\cos\frac{17}{3}\pi+\tan\frac{11}{4}\pi$

(2) $\frac{\cos 750^\circ}{\sin 420^\circ+\sin 225^\circ}-\frac{\sin 1125^\circ}{\cos 330^\circ-\cos 135^\circ}$

풀이

(1) $\sin\frac{25}{6}\pi=\sin\left(\pi\times 4+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{17}{3}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 11+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

$\tan\frac{11}{4}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}\times 5+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\tan(\pi/4)}=-1$. 따라서 구하는 값은 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$

(2) $\cos 750^\circ=\cos(180^\circ\times 4+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 420^\circ=\sin(180^\circ\times 2+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 225^\circ=\sin(180^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 1125^\circ=\sin(180^\circ\times 6+45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 330^\circ=\cos(90^\circ\times 3+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 값은 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=5$

대표예제 2

다음 중에서 $\sin\theta$와 같은 것은?

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ ② $\sin(-\pi+\theta)$ ③ $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$ ④ $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)$

풀이

보기를 하나씩 정리해보면

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ ② $\sin(-\pi+\theta)=-\sin(\pi-\theta)=-\sin\theta$

③ $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$ ④ $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\theta\right)=-\sin\theta$

따라서 답은 ③ $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$

대표예제 3

함수 $f(x)=a\sin x+b\cos x$는 점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$를 지나고 최댓값과 최솟값의 차가 10일 때, $|a-b|$의 값은?

풀이

삼각함수의 합성으로부터

$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$이므로 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이 되어 $2\sqrt{a^2+b^2}=10$이다. $a^2+b^2=25$

점 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{7}{\sqrt{2}}\right)$를 대입 하여 정리하면 $a+b=7$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \Rightarrow 49=25+2ab \Rightarrow ab=12$

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=25-24=1 \Rightarrow a-b=\pm 1$

따라서 $|a-b|=1$

6. 역삼각함수

모든 삼각함수는 정의역에서 일대일 대응이 아니므로 역함수를 갖지 않는다.
그러나 일대일 대응이 되도록 정의역을 제한하여 역함수를 정의할 수 있다.

1) 역삼각함수의 정의

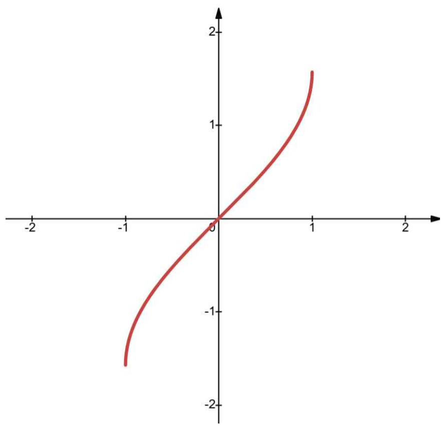
(1) 역 사인 함수

사인함수는 일대일 대응이 아니지만 정의역 구간을 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$로 제한하면 이 함수는 일대일 대응이다. 그러므로 이 제한된 사인함수의 역함수는 존재한다.

기호로 $y=\sin^{-1}x$ 또는 $y=\arcsin x$로 나타낸다.

이 함수를 역사인함수(inverse sine function) 또는 아크사인함수(arcsine function)라고 한다.

즉, $y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y \ \left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$



$y=\sin x,\quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

$y=\sin^{-1}x,\quad -1\le x\le 1,\quad -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

(2) 역 코사인 함수

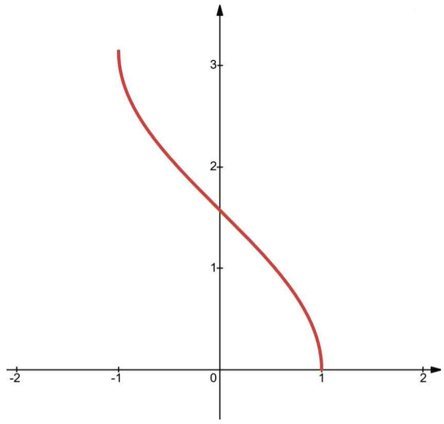
역사인함수와 비슷한 방법으로 얻을 수 있다.

코사인함수의 정의역 구간을 닫힌구간 $[0, \pi]$로 제한하면 일대일 대응이므로 역함수는 존재한다.

기호로 $y=\cos^{-1}x$ 또는 $y=\arccos x$로 나타낸다.

이 함수를 역코사인함수(inverse cosine function) 또는 아크코사인함수(arccosine function)라고 한다.

즉, $y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow x=\cos y \ (0 \le y \le \pi)$



$y=\cos x,\ 0 \le x \le \pi$ $\qquad$ $y=\cos^{-1}x,\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi$

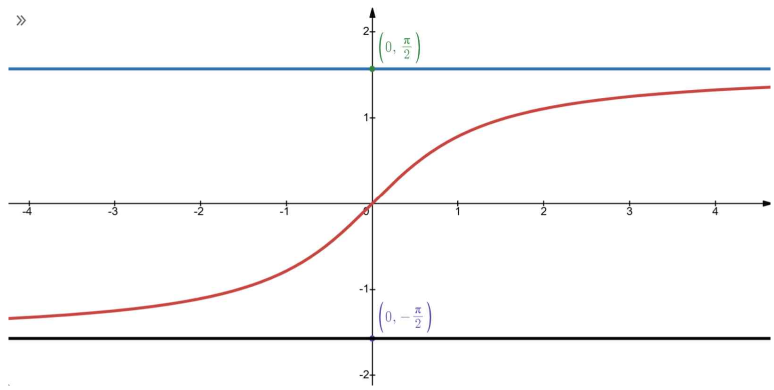
(3) 역 탄젠트 함수

탄젠트 함수의 정의역 구간을 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$로 제한하면 일대일 대응이므로 역함수는 존재한다.

기호로 $y=\tan^{-1}x$ 또는 $y=\arctan x$로 나타낸다.

이 함수를 역탄젠트함수(inverse tangent function) 또는 아크탄젠트함수(arctangent function)라고 한다.

즉, $y=\tan^{-1}x \Leftrightarrow x=\tan y \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$



$y=\tan x,\ \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $y=\tan^{-1}x,\ \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

주의	$\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$**의 의미** 역삼각함수에서 쓰는 $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x$는 거듭제곱의 -1제곱(즉, 역수)를 뜻하는 표기가 아니라, 각각 사인, 코사인, 탄젠트 함수의 역함수를 뜻하는 표기이다. • 역함수 의미 $y=\sin^{-1}x \Leftrightarrow x=\sin y,\quad y=\cos^{-1}x \Leftrightarrow x=\cos y,\quad y=\tan^{-1}x \Leftrightarrow x=\tan y$ • 역수$\left(1/\text{함수}\right)$ 삼각함수의 역수는 보통 다음처럼 쓴다. $\dfrac{1}{\sin x}=\csc x,\quad \dfrac{1}{\cos x}=\sec x,\quad \dfrac{1}{\tan x}=\cot x$ 다시 말하면 $\sin^{-1}x \neq \dfrac{1}{\sin x},\quad \cos^{-1}x \neq \dfrac{1}{\cos x},\quad \tan^{-1}x \neq \dfrac{1}{\tan x}$ 이다. 따라서 역삼각함수를 역수와 구분하자.

2) 역삼각함수의 합성(소거방정식)

역삼각함수는 삼각함수가 일대일 대응이 되도록 정의역(또는 치역)을 제한하여 정의한 역함수이다.
따라서 합성 $f^{-1}(f(x))$는 항상 x가 되는 것이 아니라, 제한한 구간 안에서만 x가 된다. 이 점을 식으로 정리하면 아래와 같고 이 식들은 정의역(또는 치역) 조건을 함께 기억해야 정확하다.

(1) $\arcsin x$ **(또는** $\sin^{-1}x$ **)**

사인함수의 제한 구간을 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$로 잡으면 $\arcsin$이 정의된다.

① $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$에 대해 $\arcsin(\sin x)=x$ $\left(\text{즉, } -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\text{에 대해 } \sin^{-1}(\sin x)=x\right)$

② $-1 \le x \le 1$에 대해 $\sin(\arcsin x)=x$ $\left(\text{즉, } -1 \le x \le 1\text{에 대해 } \sin(\sin^{-1}x)=x\right)$

(2) $\arccos x$ **(또는** $\cos^{-1}x$ **)**

코사인함수의 제한 구간을 $[0, \pi]$로 잡으면 $\arccos$가 정의된다.

① $0 \le x \le \pi$에 대해 $\arccos(\cos x)=x$ $\left(\text{즉, } 0 \le x \le \pi\text{에 대해 } \cos^{-1}(\cos x)=x\right)$

② $-1 \le x \le 1$에 대해 $\cos(\arccos x)=x$ $\left(\text{즉, } -1 \le x \le 1\text{에 대해 } \cos(\cos^{-1}x)=x\right)$

(3) $\arctan x$ **(또는** $\tan^{-1}x$ **)**

탄젠트함수의 제한 구간을 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$로 잡으면 $\arctan$이 정의된다.

① $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$에 대해 $\arctan(\tan x)=x$ $\left(\text{즉, } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\text{에 대해 } \tan^{-1}(\tan x)=x\right)$

② 모든 실수 x에 대해 $\tan(\arctan x)=x$ $\left(\text{즉, 모든 실수 } x\text{에 대해 } \tan(\tan^{-1}x)=x\right)$

대표예제 1

다음 값을 구하시오

(1) $\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ (2) $\sin\left(\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

풀이

(1) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$은 기함수이므로 $\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=-\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ 이다. 여기서

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\alpha$라 놓으면 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$이다. 이때 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ 이다.

따라서 $\sin\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

(2) $\sin\left(\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$에서 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha$라 놓으면 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$이다. 이때 α는 제 2사분면 각이므로 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다.

따라서 $\sin\left(\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

대표예제 2

$\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하면?

풀이

$\tan^{-1}\frac{1}{3}=\alpha$라 놓으면 $\frac{1}{3}=\tan\alpha$ 이고 $\tan^{-1}\frac{1}{2}=\beta$라 놓으면 $\frac{1}{2}=\tan\beta$이다.

$\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}}=1$

따라서 답은 1

3) 역삼각함수의 기본공식

(1) $-1\le x\le 1$ 에서 $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

(2) $-1\le x\le 1$ 에서 $\cos^{-1}(x)+\cos^{-1}(-x)=\pi$

(3) $x>0$ 에서 $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

(4) $x<0$ 에서 $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$

(5) $x>0$ 에서 $\cot^{-1}(x)+\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

(6) $x<0$ 에서 $\cot^{-1}(x)+\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3\pi}{2}$

(7) x는 모든 실수에서 $\tan^{-1}(x)+\cot^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

(1) 증명

$\alpha=\sin^{-1}(x) \Rightarrow \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha=x$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=x$. 또한 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 이므로 $\frac{\pi}{2}-\alpha\in[0, \pi]$

따라서 $[0, \pi]$에서 코사인의 역함수 정의에 의해 $\cos^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\alpha$

양변에 $\alpha=\sin^{-1}(x)$를 더하면

$\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$

(2) 증명

$\beta=\cos^{-1}(x) \Rightarrow \beta\in[0, \pi]$, $\cos\beta=x$.

그러면 $\cos(\pi-\beta)=-\cos\beta=-x$

또한 $\beta\in[0, \pi]$ 이면 $\pi-\beta\in[0, \pi]$.

따라서 역함수 정의에 의해 $\cos^{-1}(-x)=\pi-\beta$

양변에 $\cos^{-1}(x)=\beta$를 더하면 $\cos^{-1}(x)+\cos^{-1}(-x)=\pi$

(3) 증명

$\theta=\tan^{-1}(x) \Rightarrow \theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan\theta=x$

$x>0$ 이므로 $\theta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 따라서 $\frac{\pi}{2}-\theta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 이고,

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{x}$

치역범위에 의해 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$는 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 속하는 값이므로 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$

따라서 $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}$

(4) 증명

$\theta=\tan^{-1}(x) \Rightarrow \theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan\theta=x$

$x<0$ 이므로 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. 그러면 $-\frac{\pi}{2}-\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 이고

$\tan\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

또한 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$ 이므로 $\tan\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-(-\cot\theta)=\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{x}$

치역이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}-\theta$

따라서 $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\theta+\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\frac{\pi}{2}$

(5) 증명

$\phi=\cot^{-1}(x) \Rightarrow \phi\in(0,\pi),\ \cot\phi=x$

$x>0$ 이면 $\cot\phi>0$ 이므로 $\phi\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\dfrac{\pi}{2}-\phi\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 이고 $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\tan\phi=\dfrac{1}{\cot\phi}=\dfrac{1}{x}$

치역 $(0,\pi)$에서 $\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$의 값은 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 속하므로 $\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\phi$

따라서 $\cot^{-1}(x)+\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\phi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\dfrac{\pi}{2}$

(6) 증명

$\phi=\cot^{-1}(x) \Rightarrow \phi\in(0,\pi),\ \cot\phi=x.$

$x<0$ 이면 $\cot\phi<0$ 이므로 $\phi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$

이때 $\dfrac{3\pi}{2}-\phi\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)\subset(0,\pi)$ 이고

$\cot\left(\dfrac{3\pi}{2}-\phi\right)=\cot\left(\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)\right)=\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\tan\phi=\dfrac{1}{\cot\phi}=\dfrac{1}{x}$

따라서 주값 정의에 의해 $\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3\pi}{2}-\phi$

결국 $\cot^{-1}(x)+\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\phi+\left(\dfrac{3\pi}{2}-\phi\right)=\dfrac{3\pi}{2}$

(7) 증명

$\phi=\cot^{-1}(x)\in(0,\pi)$라 두면 $\cot\phi=x$

그러면 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)=\cot\phi=x$

이때 $\dfrac{\pi}{2}-\phi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ (왜냐하면 $\phi\in(0,\pi)$) 이므로 $\tan^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}-\phi$

따라서 $\tan^{-1}(x)+\cot^{-1}(x)=\left(\dfrac{\pi}{2}-\phi\right)+\phi=\dfrac{\pi}{2}$

7. 쌍곡선 함수

지수함수 e^x와 e^{-x}의 적절한 결합은 수학에서 자주 등장하며 여러 분야에 응용된다.
이러한 결합으로 정의되는 함수들은 삼각함수와 성질이 비슷한 점이 많다. 삼각함수가 원과 밀접한 관련이 있듯이, 이 함수들은 쌍곡선과 관련이 있다. 이런 관계성에 의해 이들을 통틀어 쌍곡선 함수(hyperbolic function)라고 하며, 대표적으로 다음의 세 함수를 사용한다.

- 쌍곡선 사인 함수(hyperbolic sine function)
- 쌍곡선 코사인 함수(hyperbolic cosine function)
- 쌍곡선 탄젠트 함수(hyperbolic tangent function)

1) 쌍곡선함수의 정의

쌍곡선 사인, 쌍곡선 코사인, 쌍곡선 탄젠트 함수는 다음과 같이 정의한다.

(1) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

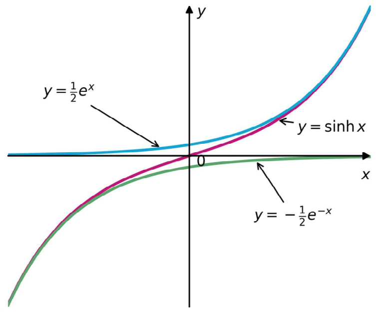
(4) $\mathrm{csch}\,x=\dfrac{1}{\sinh x}$

(2) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

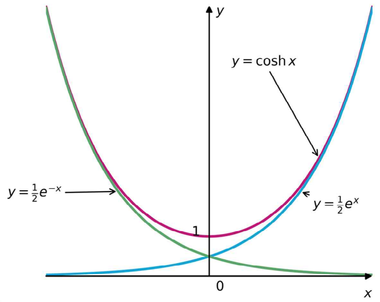
(3) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \left(= \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \right)$

(5) $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

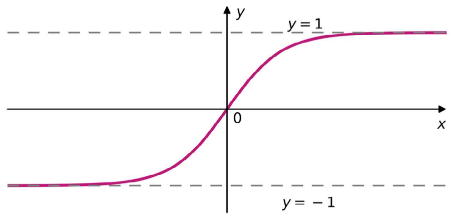
(6) $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{sech} x}$



$y = \sinh x$



$y = \cosh x$



$y = \tanh x$

*** 그래프특징**

$y = \sinh x$: 원점을 지나며 x가 커질수록 급격히 증가(홀함수 형태)

$y = \cosh x$: $x = 0$에서 최솟값을 가지며 좌우 대칭(짝함수 형태)

$y = \tanh x$: 원점을 지나며 점점 완만해져 수평선에 가까워짐(값이 -1과 1 사이에 머무는 형태)

2) 쌍곡선 함수의 기본 공식

쌍곡선 함수는 지수함수로 정의되기 때문에, 삼각함수의 기본 항등식과 비슷한 형태의 관계식이 성립한다. 특히 $\cosh x$와 $\sinh x$ 사이에는 다음의 핵심 관계가 있다.

① $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

② $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

③ $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

참고 : ②, ③은 ①을 각각 $\cosh^2 x$, $\sinh^2 x$로 나누면 바로 얻어진다.
(단, 나누는 과정에서 $\cosh x \neq 0$, $\sinh x \neq 0$ 등 정의역 조건을 자연스럽게 가정한다.)

3) 쌍곡선 함수의 공식

(1) 덧셈정리

쌍곡선 함수도 삼각함수처럼 "합의 형태"를 곱의 형태로 바꾸는 공식이 있다. 계산은 지수함수 정의를 이용하면 정리된다.

① $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

② $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

③ $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

④ $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

(2) 배각공식

덧셈정리에서 $y = x$를 대입하면 배각공식을 얻는다.

① $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

② $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

③ $\tanh 2x = \dfrac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

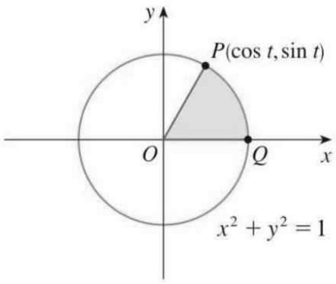
(3) 반각공식

배각공식 $\cosh 2u = \cosh^2 u + \sinh^2 u$ 및 기본 항등식 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$을 함께 이용하면 반각공식을 얻는다. (여기서 $u = \dfrac{x}{2}$)

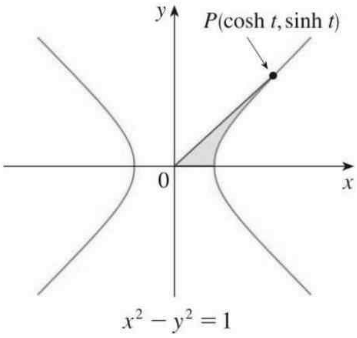
① $\sinh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x - 1}{2}$

② $\cosh^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\cosh x + 1}{2}$

참고자료



t가 임의의 실수이면, 점 $P(\cos t, \sin t)$는 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$을 만족하므로 단위원 $x^2 + y^2 = 1$ 위에 놓여 있다. 사실상 t는 위의 그림에서 $\angle POQ$의 라디안 단위로 측정된 값이다. 그런 이유로 삼각함수를 원함수라고도 한다.



마찬가지로 임의의 실수 t에 대해 점 $P(\cosh t, \sinh t)$는 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ 과 $\cosh t \geq 1$을 만족하므로 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$의 오른쪽 영역에 놓여 있다. 그러므로 쌍곡선함수라는 명칭에 타당성함을 인정하자.

8. 역 쌍곡선 함수

역쌍곡선함수는 쌍곡선함수의 역함수이다. 단, 역함수가 잘 정의되려면 원래 함수가 일대일 대응이 되도록 정의역(또는 치역)을 적절히 제한하여 주값(principal value)을 정한다.

1) 역쌍곡선함수의 정의

(1) 역사인쌍곡선함수 $y = \operatorname{arc\,sinh} x$ **(또는** $y = \sinh^{-1} x$ **)**

$\sinh x$는 모든 실수에서 단조 증가이므로 전체 구간에서 일대일 대응이다.
따라서 역함수는 주값 제한 없이 정의된다.

$$y = \sinh^{-1} x \quad (x \in R,\ y \in R)$$

(2) 역코사인쌍곡선함수 $y = \operatorname{arc\,cosh} x$ **(또는** $y = \cosh^{-1} x$ **)**

$\cosh x$는 전체 실수에서 일대일이 아니지만, $x \geq 0$에서 단조 증가이고 $\cosh x \geq 1$ 이다.
따라서 주값을 $x \geq 0$로 제한하여 역함수를 정의한다.

$$y = \cosh^{-1} x \ \ (x \geq 1,\ y \geq 0)$$

(3) 역탄젠트쌍곡선함수 $y = \mathrm{arc}\tanh x$ **(또는** $y = \tanh^{-1} x$ **)**
$\tanh x$는 모든 실수에서 단조 증가이며 치역이 개구간$(-1,\ 1)$ 이다.
따라서 역함수의 정의역은 $(-1,\ 1)$로 정해진다.

$$y = \tanh^{-1} x \ \ (-1 < x < 1,\ y \in R)$$

(4) 역코시컨트쌍곡선함수

$$y = \mathrm{csch}^{-1} x \ \ (x \neq 0)$$

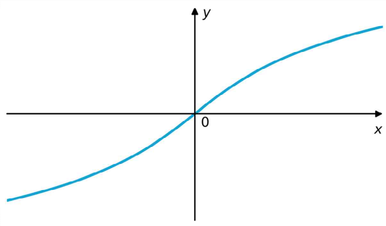
(5) 역시컨트쌍곡선함수

$$y = \mathrm{sech}^{-1} x \ \ (0 < x \leq 1)$$

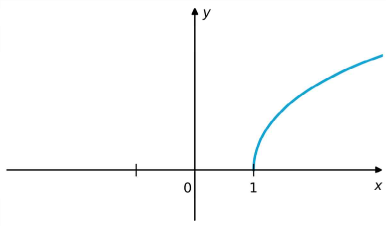
(6) 역코탄젠트쌍곡선함수

$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$의 치역 성질로 인해 $|x| > 1$에서 주값을 잡는다.

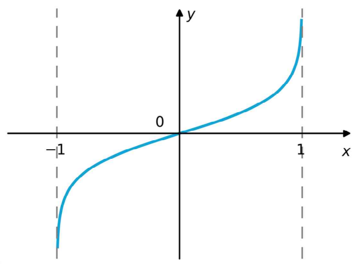
$$y = \coth^{-1} x \ \ (x < -1,\ x > 1)$$



$y = \sinh^{-1} x$



$y = \cosh^{-1} x$



$y = \tanh^{-1} x$

2) 역쌍곡선함수의 로그 표현

역쌍곡선함수는 지수함수 정의를 이용하면 모두 로그 형태로 정리된다.

(1) $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ \ (x \in R)$

(2) $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ \ (x \geq 1)$

(3) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \ \ (|x| < 1)$

(4) $\mathrm{csch}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right) \ \ (x \neq 0)$

(5) $\mathrm{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}\right) \ \ (0 < x \leq 1)$

(6) $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \ \ (|x| > 1)$

대표예제 1

$f(x)=\sinh(2\sinh^{-1}x)$에 대하여 $f(\sqrt{3})$의 값은?

풀이

$\sinh^{-1}\sqrt{3}=\alpha$라 놓으면 $\sinh\alpha=\sqrt{3}$ 이다. 쌍곡선함수의 기본공식으로부터
$-\sinh^2\alpha+\cosh^2\alpha=1$ 이므로 $\cosh\alpha=2$ 이다. $(\cosh\alpha\geq 1)$
구하는 값 $f(\sqrt{3})=\sinh(2\sinh^{-1}\sqrt{3})=\sinh(2\alpha)=2\sinh\alpha\cosh\alpha=4\sqrt{3}$
따라서 답은 $4\sqrt{3}$

대표예제 2

$e^x+e^{-x}=\sqrt{5}$를 만족하는 x의 값을 구하시오.

풀이

$\cosh x=\dfrac{e^x+x^{-x}}{2}$ 이므로 $2\cosh x=\sqrt{5} \Leftrightarrow \cosh x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
그러므로 $x=\pm\cosh^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)=\pm\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1}\right)=\pm\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$
따라서 답은 $x=\pm\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$